MICROECONOMÍA I

Lista de problemas. Curso 2008-2009
Profesores: Enriqueta Aragonès, Daniela Hauser, Sjaak Hurkens, Daniela Iorio.

1 Las preferencias y la función de utilidad

1.1. Construir un mapa de curvas de indiferencia que representen unas preferencias completas, reflexivas y transitivas pero que:

1. Uno de los bienes sea un mal.
2. El consumidor pueda alcanzar un punto en el que esté saturado de un bien pero no del otro.
3. El consumidor pueda alcanzar un punto en el que esté saturado de ambos bienes.
4. Exista una cantidad de cada bien hasta la cual se trate de un bien y a partir de ella sea un mal.

1.2.a. Representar gráficamente los siguientes órdenes de preferencia:

1. No soporto la mermelada ni la mantequilla por sí solos, pero me gustan los sandwiches de mermelada y mantequilla.
2. x_1 y x_2 son buenos sustitutos; siempre que se doble x_1, me resulta indiferente que x_2 se reduzca a la mitad.
3. No me importa si tienen Heineken o San Miguel, siempre que sea cerveza.
4. Cerillas rojas y azules con idénticas propiedades incendiarias.
5. Zapatos para el pie derecho y el pie izquierdo del mismo tamaño, calidad, diseño, etc.

1.2.b. Respecto los dos problemas anteriores, indicar si las preferencias son regulares o no. En caso negativo, indicar qué propiedad no se cumple. En caso afirmativo, indicar si las propiedades de monotonicidad y convexidad se cumplen de forma estricta o de forma débil.

1.3. Si dadas dos combinaciones de consumo x e y resulta que x es al menos tan preferida como y y al mismo tiempo y es al menos tan preferida como x, entonces decimos x e y dejan *indiferente* al consumidor. Ello se denota con el símbolo $x \backsim y$.

1. Suponer que $x \backsim y$. Escribir esto mismo pero en términos de $\succsim$.
2. Una relación como $\succsim$ definida sobre un conjunto de combinaciones de consumo se dice que es *reflexiva* si dada cualquier combinación de consumo x siempre es cierto que $x \succsim x$. Razonar y escribir esto en términos de $\backsim$.
3. ¿La relación de indiferencia es *reflexiva*?

1.4 Una relación $\succsim$ es *transitiva* cuando se verifica lo siguiente: si $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$. ¿La relación de indiferencia es *transitiva*? En caso afirmativo, escribir en términos de $\backsim$. Contestar la misma pregunta en términos de $\succ$, que representa la relación de preferencia estricta.

1.5. Dibujar el mapa de curvas de indiferencia correspondiente a las funciones de utilidad:

1. $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$.
2. $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
3. $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ donde $\alpha, \beta > 0$.
4. $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$.
5. $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.
6. $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ donde $\alpha, \beta > 0$.
7. $u(x_1, x_2) = x_1$.
8. $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$.

1.6. Considerar un conjunto X de combinaciones de consumo y una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, que a cada combinación de consumo x asigna un nivel de utilidad $u(x)$. Sea f una función creciente. Considerar la función de utilidad $f \circ u$, que a cada combinación de consumo x asigna un nivel de utilidad $f(u(x))$. En este caso, se dice que $f \circ u$ es una *transformación monótona* de u. Demostrar que u y $f \circ u$ representan las mismas preferencias. Utilizar esta propiedad de la utilidad para comprobar las siguientes afirmaciones.

1. Las funciones de utilidad $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ y $v(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$ representan las mismas preferencias.

2. Las funciones de utilidad $u(x_1, x_2) = {x_1}^2 x_2$ y $v(x_1, x_2) = 2\ln(x_1) + \ln(x_2)$ representan las mismas preferencias.

1.7. En general un conjunto X es *convexo* si para cualesquiera dos elementos $x, y \in B$ se verifica que $tx + (1 - t)y$ también pertenece al conjunto X para cualquier $t \in [0, 1]$. Considerar un conjunto X de combinaciones de consumo. Una relación de preferencias $\succsim$ es convexa si para cualquier $y \in X$, el conjunto $\{x : x \succsim y\}$ es convexo. Representar gráficamente (en el mapa de curvas de indiferencia) unas preferencias convexas. Representar estas mismas preferencias mediante varios ejemplos de función de utilidad.

2 La restricción presupuestaria

2.1. Suponer que existen sólo dos mercancías. Un consumidor con una renta $m > 0$ observa los precios p_1 y p_2 de los dos bienes. Escribir la ecuación del *conjunto presupuestario* y de la *recta presupuestaria* y dibujarlas. (¡Ojo! Son dos cosas distintas.)

2.2. Un consumidor dispone de una renta $m = 10$ y se enfrenta a los precios $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$.

1. Escribir y dibujar el conjunto presupuestario y la recta presupuestaria.

2. Comprobar que $(2, 2)$ es una cesta factible, que $(3, 4)$ agota la renta del consumidor y que $(4, 5)$ está fuera de su alcance. Representar gráficamente.

3. El gobierno establece un límite al consumo del bien 2 que obliga al consumidor a no consumir más de 6 unidades. Dibujar el nuevo conjunto presupuestario.

2.3. Un consumidor dispone de 40 unidades monetarias para gastarse en dos bienes distintos. El precio del bien 1 es $p_1 = 2$ y el precio del bien 2 es $p_2 = 8$. El gobierno decide subvencionar todas aquellas unidades de bien 1 que excedan $x_1 = 8$ con una subvención de 1 unidad monetaria.

1. Calcular y dibujar la restricción presupuestaria de este consumidor.

2. ¿Cómo afecta esta subvención al bienestar del consumidor?

2.4. Un consumidor dispone de una renta $m = 100$.

1. Obtener y representar gráficamente la restricción presupuestaria con unos precios $p_1 = 10$ y $p_2 = 20$.

2. Repetir el apartado 1 suponiendo que existe un impuesto del 10% sobre el precio del bien x_1.

3. Repetir el apartado 1 suponiendo que hay un impuesto del 10% sobre el precio de ambos bienes.

4. Partiendo de los datos iniciales, ¿en qué tanto por ciento tendría que haber disminuido la renta para obtener el mismo resultado que en el apartado 3?

2.5. Un consumidor gasta su renta de 20 millones de unidades monetarias en vivienda (bien 1) y en consumir todos los otros bienes (bien 2). Suponiendo que $p_1 = p_2 = 1$, obtener y representar la restricción presupuestaria en cada caso:

1. Sin ninguna subvención.

2. Bajo un programa de subvención del 40% del importe de la vivienda, con un límite de 10 millones de unidades monetarias en el importe total de la subvención.

3. Bajo un programa de subvención del valor total de la vivienda, con un límite de 10 millones de unidades monetarias en el importe total de la subvención.

2.6. Demuestre que el conjunto presupuestario es convexo.

3 La elección del consumidor

3.1. Un consumidor con una renta m de 100 unidades monetarias tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad

$$u(x_1,\, x_2) = x_1 x_2 + x_1.$$

Calcular los precios a los que el consumidor estaría dispuesto a comprar la combinación de consumo (6, 2).

3.2. Un agente dispone de renta $m = 10$ y se enfrenta a precios $(p_1,\, p_2) = (2, 3)$. Sus preferencias están representadas por

$$u(x_1,\, x_2) = x_1 + x_2.$$

1. Escribir y dibujar el conjunto presupuestario y la recta presupuestaria.
2. Justificar en términos de sus preferencias que la elección óptima sea (5, 0). Explicar porqué razón ni (5, 3) ni (2, 2) pueden ser óptimos.
3. Si los precios fueran (5, 5), ¿cuál sería la elección óptima?

3.3. Una empresa de telefonía móvil ofrece dos sistemas alternativos de servicio. El primero es un sistema de tarjeta, sin cuotas, con un precio de 80 unidades monetarias por minuto. El segundo consiste en el pago de 2000 unidades monetarias como cuota mensual, más 40 unidades monetarias adicionales por minuto. Un estudiante gasta el importe de su beca mensual de 50.000 unidades monetarias en teléfono (x_1) y otros bienes (x_2). Suponer que $p_2 = 1$.

1. Obtener y dibujar el conjunto de oportunidades del estudiante suponiendo que sólo está disponible el sistema de tarjeta. Dibujar un mapa de curvas de indiferencia tal que el estudiante no utilice teléfono y otro en el que sí lo use.
2. Repetir el apartado 1 para el caso en que el único sistema disponible sea el de cuotas.
3. La función de utilidad del individuo es

$$u\,(x_1, x_2) = x_2 + \alpha x_1$$

, siendo α una constante positiva. Suponiendo que el estudiante puede optar entre ambos sistemas (o ninguno), determinar el consumo óptimo de teléfono y otros bienes, según los valores de α.

3.4. Una empresa de electricidad ofrece los siguientes planes de contratación de suministro eléctrico (x_1):

Plan A: 20 unidades monetarias por cada kilovatio hora (kwh) contratado hasta los primeros 200 kwh y 10 unidades monetarias por kwh adicional por encima de los 200 kwh.

Plan B: Pagar 6000 unidades monetarias de cuota fija y tener acceso a cualquier consumo deseado de electricidad.

Un consumidor dispone de una renta $m = 8000$ y observa que el precio de los bienes distintos a la electricidad (x_2) es de $p_2 = 20$.

1. Dibujar el conjunto presupuestario del consumidor bajo el Plan A y bajo el Plan B.

2. ¿Qué plan escogería el consumidor si sus preferencias fuesen del tipo

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

?

3. ¿Y si sus preferencias fuesen del tipo

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{x_1, \frac{1}{2}x_2\right\}$$

?

3.5. Una estudiante, con una renta de 40.000 unidades monetarias para gastar durante el curso en comida (bien 1) y libros (bien 2), tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$. Suponer que los precios son $p_1 = 100$ y $p_2 = 2500$.

1. ¿Cuál es su consumo óptimo? Representarlo gráficamente.

2. Suponer que se crea una cooperativa para la venta de libros. Para ser socio de la cooperativa se ha de pagar una cuota de asociado de 100. Los miembros de la cooperativa tienen un descuento en el precio de los libros del 10%. Dibujar la nueva restricción presupuestaria. Suponer que la estudiante se hace socia de la cooperativa. ¿Cuál es su consumo óptimo?

3. ¿Se hará socia de la cooperativa?

3.6. Una hipótesis importante de la teoría del consumidor es que éste va a gastar siempre toda su renta. Sean $m = 40$ y $(p_1, p_2) = (2, 5)$.

1. Comprobar que si
$$u(x_1, x_2) = 8x_1 + 3x_2$$
representa sus preferencias, entonces la solución óptima está en la recta presupuestaria.

2. Comprobar que si
$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$
representa sus preferencias, entonces la solución óptima está en la recta presupuestaria.

3. Comprobar que si
$$u(x_1, x_2) = min\{x_1, 3x_2\}$$
representa sus preferencias, entonces la solución óptima está en la recta presupuestaria.

   Esta hipótesis puede expresarse (de forma más fuerte) diciendo que las preferencias son *estrictamente monótonas*. Una relación de preferencia es *estrictamente monótona* si cuando $z_i > x_i$ para algún i y $z \geq x$ ocurre que $z \succ x$. Pero la monotonicidad estricta no es necesaria para poder asegurar que el consumidor gastará toda su renta. Las preferencias representadas por las funciones Leontief (apartado 3) no son estrictamente monótonas, pero la solución siempre está en la recta presupuestaria.

4. Poner un ejemplo gráfico de unas preferencias que ni siquiera cumplan la monotonicidad débil, es decir, no cumplan que "si $z \geq x$ entonces $z \succsim x$".

5. Poner un ejemplo gráfico de un consumidor que *no* cumple la monotonicidad débil y sin embargo se gasta toda su renta.

4 La función de demanda, la curva de Engel y la ecuación de Slutsky

4.1. Un agente tiene preferencias representadas por

$$u(x_1, x_2) = min\{2x_1, x_2\}.$$

Éste agente se enfrenta a precios estrictamente positivos (escribimos $(p_1, p_2) \gg 0$) y dispone de una renta $m > 0$.

1. Obtener las funciones de demanda para las dos mercancías.

2. Obtener y dibujar las *curvas de Engel* para la mercancía 2.

4.2. Sea

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},$$

donde $0 < \alpha < 1$ la función de utilidad de un agente, que se enfrenta a unos precios $(p_1, p_2) \gg 0$ y que dispone de una renta $m > 0$.

1. Obtener las funciones de demanda para las dos mercancías.

2. Obtener y dibujar las *curvas de Engel* para la mercancía 2.

3. ¿Qué papel juega el parámetro α?

4.3. A un mapa de curvas de indiferencia se le llama *verticalmente paralelo* si la relación marginal de sustitución es constante para cada nivel de x_1. En otras palabras, para cada valor de x_1, la RMS es independiente de x_2.

1. ¿Cuál es la forma general de la función de utilidad que representa esta preferencia? Dar algunos ejemplos.

2. Representar la curva renta-consumo y explicar su significado en el caso descrito.

3. Representar las curvas de Engel correspondientes a ambos bienes.

4. Demostrar que se cumple la *ley de la demanda* (efectuar la descomposición entre efecto renta y efecto sustitución).

4.4. Un mapa de curvas de indiferencia es *homotético* si toda recta que pasa por el origen corta a las curvas de indiferencia en puntos en los que todas las curvas de indiferencia tienen la misma pendiente. Considerar un consumidor cuyo mapa de curvas de indiferencia es homotético.

1. ¿Cuál es la forma general de la función de utilidad que represente esta preferencia? Escriba unos ejemplos.
2. Representar la curva renta-consumo.
3. Demostrar que las curvas de Engel son líneas rectas.
4. Demostrar que ninguno de los dos bienes es Giffen.

4.5. Suponer que un consumidor Cobb-Douglas

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

observa precios unitarios y dispone de una renta nominal de 10 unidades.

1. Obtener los consumos óptimos.
2. Calcular el efecto sustitución de Slutsky si el precio de x_1 pasa a ser igual a 2.
3. Calcular el efecto sustitución de Hicks si el precio de x_1 pasa a ser igual a 2.
4. Efectuar la descomposición gráfica en ambos casos.

4.6. Considerar un consumidor con unas preferencias representadas por

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{x_1, \frac{x_2}{2}\right\}$$

y una renta de $m = 12$. Suponer que los precios de mercado son $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$.

1. Representar el mapa de curvas de indiferencia.
2. Dibujar el conjunto presupuestario.
3. Determinar el consumo óptimo del consumidor.
4. Obtener la función de demanda del bien x_1. Dibujarla para $p_2 = 2$ y $m = 12$.
5. Descomponer, según Hicks, el efecto sobre la demanda del bien x_1 si $\Delta p_1 = 3$. ¿En cuánto debería aumentar m para compensar al consumidor por el incremento en el precio del bien x_1? Representar las respuestas gráficamente.

4.7. Un consumidor tiene unas preferencias sobre dos bienes (1 y 2) representadas por la función de utilidad

$$u(x_1,\, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

observa precios p_1 y p_2 y dispone de una renta de m unidades.

1. Representar el mapa de curvas de indiferencia.
2. Dibujar el conjunto presupuestario.
3. Determinar el consumo óptimo del consumidor.
4. Obtener la función de demanda del bien x_1. Dibujarla para $p_2 = 1$, $m = 10$ y $\alpha = \beta = 1$.

4.8. Un consumidor tiene unas preferencias sobre pan (el bien 1) y vino (el bien 2) representadas por la función de utilidad

$$u\left(x_1, x_2\right) = x_1 x_2.$$

El Gobierno considera adecuado reducir el consumo de vino y a tal efecto decide gravar su consumo con un IVA del 25%. Los precios vigentes son unitarios mientras que la renta monetaria del consumidor es $m = 10$.

1. Calcular el efecto total sobre la demanda de ambos bienes.

2. Calcular la descomposición de Slutsky para ambos bienes.
3. Calcular la descomposición de Hicks para ambos bienes.
4. En ambos casos, calcular la renta monetaria adicional que compensaría la pérdida de renta real.
5. Calcular la recaudación del Gobierno.
6. Suponer que el Gobierno decide devolver en forma de transferencia la recaudación indirecta. ¿Se cumpliría el objetivo de reducir el consumo de vino?
7. La medida anterior, ¿es neutral desde el punto de vista de la hacienda pública? ¿es neutral desde el punto de vista del bienestar privado?
8. Suponer que el Gobierno en vez de devolver la recaudación indirecta en forma de transferencia decide usarla para subvencionar el consumo de pan. Calcular el tipo de subvención que es neutral desde el punto de vista de la hacienda pública. ¿Es neutral desde la perspectiva del bienestar?
9. A la vista del ejercicio, comentar la incidencia sobre el bienestar de las actividades recaudatorias gubernamentales que no crean déficit.

5 La preferencia revelada

5.1. La siguiente tabla refleja parcialmente la situación de un consumidor en términos de precios, consumos y rentas correspondientes a dos años consecutivos.

Año	p_1	p_2	x_1	x_2	m
1	10	20	50	25	
2	10	10			750

Argumentar que necesariamente en el segundo año $x_1 \leq 50$.

5.2. Un consumidor elige la combinación de consumo $(6, 6)$ cuando los precios son $(6, 5)$ y elige la combinación de consumo $(10, 0)$ cuando los precios son $(5, 5)$.¿Violan sus decisiones el axioma débil de la preferencia revelada?

¿Alguna de las dos combinaciones de consumo se revela preferida a la otra? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es?

5.3. Determinar, en cada uno de los siguientes casos, si las elecciones satisfacen el axioma débil de la preferencia revelada:

1. Con $m = 2000$, $p_1 = 100$ y $p_2 = 100$, la elección es $x_1 = 10$ y $x_2 = 10$; con $m = 2000$, $p_1 = 50$ y $p_2 = 300$, la elección es $x_1 = 20$ y $x_2 = 3'33$.
2. Con $m = 2000$, $p_1 = 100$ y $p_2 = 100$, la elección es $x_1 = 5$ y $x_2 = 15$; con $m = 2000$, $p_1 = 200$ y $p_2 = 50$, la elección es $x_1 = 8$ y $x_2 = 8$.
3. Con $m = 1000$, $p_1 = 10$ y $p_2 = 100$, la elección es $x_1 = 10$ y $x_2 = 9$; con $m = 2000$, $p_1 = 40$ y $p_2 = 40$, la elección es $x_1 = 25$ y $x_2 = 25$.
4. Con $m = 100$, $p_1 = 10$ y $p_2 = 20$, la elección es $x_1 = 8$ y $x_2 = 1$; con $m = 500$, $p_1 = 100$ y $p_2 = 50$, la elección es $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$.

6 Aplicaciones: la oferta de trabajo y la elección intertemporal

6.1. Considerar un consumidor Cobb-Douglas $u(c, h) = ch^3$, donde c es consumo y h es ocio. El consumidor tiene una renta no salarial M y una renta salarial resultante de vender sus horas de trabajo (en total dispone de H horas). Suponer que $p = w = 1$, $H = 24$ y $M = 5$.

1. Hallar la cantidad demandada de consumo y la cantidad ofrecida de trabajo.
2. Comprobar que el ocio es un bien normal.
3. Resolver los apartados anteriores cuando $H = 10$.
4. Hallar los efectos sobre el consumo, el ocio y las horas trabajadas de las variaciones en w.
5. Dibujar la curva de oferta de trabajo. Explicar la curva.

6.2. Un consumidor tiene una función de utilidad $u(c, h) = c + (2h)^{1/2}$, donde c representa consumo y h ocio.

1. Obtener la función de oferta de trabajo.
2. Calcular cuál es el mínimo salario para el que estará dispuesto a trabajar.
3. ¿Cómo variará su oferta de trabajo como consecuencia de una pequeña reducción en una tasa impositiva sobre la renta proporcional?
4. ¿Cómo variará su oferta de trabajo como consecuencia de una pequeña reducción en una tasa impositiva sobre el valor añadido?

6.3. Considerar un consumidor que vive dos períodos: el presente, o período 1, y el futuro, o período 2. Su único objetivo en la vida es maximizar la utilidad que deriva de su consumo presente (c_1) y futuro (c_2). Su función de utilidad es $u(c_1, c_2) = c_1 c_2$. Su renta laboral en el presente es $m_1 = 10$ mientras que en el futuro recibe un pensión $m_2 = 5$.

1. Suponer que no existe un mercado crediticio en el que el consumidor pueda transferir sus rentas de un período a otro. Representar su conjunto de oportunidades de consumo y determinar su consumo óptimo.
2. Suponer que existe un mercado crediticio que permite transferir libremente rentas entre períodos. Representar su nuevo conjunto de oportunidades y determinar su consumo óptimo. ¿Existe ahorro?
3. ¿Es cierto que un mercado crediticio promueve el bienestar del consumidor?

6.4. Un consumidor tiene unas preferencias tales que por cada dos Euros que se gasta hoy, gasta uno mañana. Suponer que $r > 0$ es el tipo de interés del mercado.

1. Dibujar el mapa de curvas de indiferencia.
2. Suponer que este consumidor dispone sólo de $m_1 > 0$ Euros hoy. ¿Cuál sería el máximo consumo al que podría aspirar mañana? Pensar en el ahorro y su rendimiento.

3. Suponer que ahora sólo tiene $m_2 > 0$ euros mañana. Si va a un banco para poder consumir hoy. ¿Cuál es el máximo préstamo que puede pedir?

4. Suponer que este individuo dispone de una cantidad de 2,000 Euros tanto hoy como mañana. Escribir la recta presupuestaria. Dibujar el conjunto presupuestario y obtener las funciones de demanda de dinero hoy y dinero mañana.

5. ¿Por qué el efecto sustitución de la variación del tipo de interés es nulo?

7 La empresa: tecnología

7.1. Una empresa produce una mercancía Y utilizando como factores productivos trabajo L y capital K. Existen tres procesos disponibles, a los que nos referiremos como p^1, p^2 y p^3. Estos procesos satisfacen los supuestos de rendimientos constantes a escala, divisibilidad e independencia. Las actividades básicas de cada proceso son, respectivamente:

$$\begin{aligned} a^1 &= (-3, -10, 1) \\ a^2 &= (-10, -3, 1) \\ a^3 &= (-5, -5, 1)\,. \end{aligned}$$

1. Representar gráficamente los procesos productivos.

2. Determinar si son factibles las actividades:

$$\begin{aligned} t^1 &= (-18, -18, 3) \\ t^2 &= (-23, -23, 4) \\ t^3 &= (-9, -30, 3) \\ t^4 &= (-21, -28, 4) \\ t^5 &= (-36, -43, 7) \\ t^6 &= (-4, -3, 1). \end{aligned}$$

   En caso afirmativo, especificar los procesos utilizados y sus niveles de actividad.

3. Determinar cuáles son los procesos eficientes.

4. Representar gráficamente las isocuantas correspondientes a los niveles de actividad $Y = 1$, $Y = 2$ y $Y = 4$.

5. Determinar el nivel de producción de la empresa si dispone de $L = 8$ unidades de trabajo y $K = 15$ unidades de capital. Especificar qué procesos utilizará la empresa y a qué niveles de actividad.

7.2. Supongamos que existen dos procesos productivos p^1 y p^2 que satisfacen las hipótesis usuales. Sus actividades básicas son:

$$a^1 = (-1, -2, 1)$$
$$a^2 = (-2, -1, 1).$$

1. Representar gráficamente las isocuantas correspondientes a los niveles de producción $Y = 1$, $Y = 2$ y $Y = 3$.

2. Suponer ahora que el proceso p^2 tiene un tope máximo de capacidad que impide su utilización por encima del nivel de producto $Y = 2$. Representar gráficamente los dos procesos y las isocuantas correspondientes a los niveles de producción $Y = 1$, $Y = 2$ y $Y = 3$.

3. Sin suponer ahora un tope de capacidad para p^2, determinar el nivel máximo de producción que puede obtenerse si la empresa dispusiera de los siguientes recursos:

   (a) $K = L = 20$.

   (b) $K = 20$ y $L = 10$.

   (c) $K = 25$ y $L = 5$.

En cada caso especificar los procesos utilizados y su nivel de actividad.

7.3. En este ejercicio, estudiamos los rendimientos a escala.

1. Con rendimientos decrecientes a escala, la multiplicación de todos los factores por una misma constante positiva tiene como resultado la multiplicación del producto por una constante positiva menor. Demuestre que la función $f(x) = x^\alpha$ para $0 < \alpha < 1$ es una función de rendimientos decrecientes. Dibújela.

2. Con rendimientos crecientes a escala, la multiplicación de todos los factores por una misma constante positiva tiene como resultado la multiplicación del producto por una constante positiva mayor. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es una función de rendimieantos crecientes. Dibújela.

3. Imagine cuál es la definición de rendimientos constantes. Ponga un ejemplo de este tipo de tecnología y dibúje la función.

4. Una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es *homogénea de grado* r siendo $r \geq 0$ si $f(kx) = k^r f(x)$. Estudie las rendimientos en casos cuando $r > 1$, $r < 1$ y $r = 1$. Demuestre que $f(x) = x^r$ es homogénea de grado r.

7.4. Considerar la siguiente función de producción

$$f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

donde A, α y β son constantes estrictamente positivas.

1. Determinar los rendimientos a escala de f en los siguientes casos: (i) $\alpha + \beta < 1$, (ii) $\alpha + \beta = 1$ y (iii) $\alpha + \beta > 1$.

2. Suponer que $\alpha = \beta = 1/2$ y que $A = 1$. Denotar por (x_1, x_2, q) un plan de producción. Suponer que (4, 4, 4) es factible. ¿Sabría decir, sin hacer ninguna cuenta, si (9, 8, 8) es factible? Razonar y comprobar haciendo las cuentas.

7.5. Demostrar que la función CES de forma $f(x_1, x_2) = (\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho})^{1/\rho}$, donde $\alpha, \beta > 0$, es una función de rendimientos constantes a escala.

7.6. Demostrar que la función Leontief $f(x_1, x_2) = Amin\{\alpha x_1, \beta x_2\}$, donde $A, \alpha, \beta > 0$, es una función de rendimientos constantes a escala.

8 Maximización de beneficio, minimización de coste y la función de coste

8.1. Considerar una empresa con una tecnología representada por la función de producción $f(L, K) = L^{1/4}K^{1/2}$. Los precios de los dos factores son w y r.

1. Indicar los rendimientos a escala que exhibe la función de producción.

2. Hallar las funciones de demanda condicionadas de factores.

3. Obtener la funciónes de coste total, de coste medio y de coste marginal.

8.2. Considerar una empresa con una tecnología representada por la función de producción
$$f(L,K) = 3L^{1/3}K^{1/3}.$$

1. Hallar la *Relación Técnica de Sustitución*. Describir brevemente su significado.

2. Hallar los rendimientos a escala. ¿Qué significan?

3. Obtener las funciones de *Productividad Marginal* (PMg) y *Productividad Media* (PMe) del trabajo y del capital. Representarlas gráficamente.

4. Suponiendo que la empresa se comporta competitivamente en todos los mercados, formular el programa de maximización de beneficios de la empresa.

5. Suponiendo que $p = w = 2$ y $r = 1$, hallar las cantidades demandadas de trabajo y capital, así como la cantidad ofrecida de producto.

8.3. Considerar una empresa con una tecnología representada por la función de producción
$$f(L,K) = 4L^{1/4}K^{1/4}.$$

1. Hallar la *Relación Técnica de Sustitución*. Describir brevemente su significado.

2. Hallar los rendimientos a escala. ¿Qué significan?

3. Obtener las funciones de *Productividad Marginal* (PMg) y *Productividad Media* (PMe) del trabajo y del capital. Representarlas gráficamente.

4. Suponiendo que la empresa se comporta competitivamente en todos los mercados, formular el programa de maximización de beneficios de la empresa.

5. Suponiendo que $p = w = r = 4$, hallar las cantidades demandadas de trabajo y capital, así como la cantidad ofrecida de producto.

8.4. Para cada una de las siguientes funciones de producción:

(a) $f(L,K) = L^{1/4}K^{1/2}$.

(b) $f(L,K) = L^{1/3}K^{2/3}$.

(c) $f(L,K) = L^{3/4}K^{3/4}$.

(d) $f(L,K) = \min\{L,K\}$.

(e) $f(L,K) = L + K$.

1. Dibujar una isocuanta.
2. Hallar las funciones de demanda de factores y de oferta de producto.
3. Derivar *las* funciones de costes a largo plazo.
4. Obtener la función de oferta a partir de la función de costes totales. Compararla con la obtenida en el apartado 1.
5. Determinar el incremento porcentual en el coste a largo plazo de producir Y unidades si el salario w aumenta en 1%. Comentar.
6. Derivar *las* funciones de costes a corto plazo.
7. Suponer que $w = r = \overline{K} = 1$. ¿Para qué nivel de producto Y^* las dos funciones de costes totales (a largo y corto plazo) tienen el mismo valor?

8.5. Considerar una empresa competitiva con una tecnología representada por la función de producción

$$f(L,K) = L^{1/2}K^{1/2}.$$

Derivar la función de oferta a corto plazo y analizar los efectos que tendrán sobre dicha función cambios en los precios de los factores y en el precio del producto.

8.6. Sea

$$C(Y) = Y^3 - 7Y^2 + 17Y + 66$$

la función de costes totales a corto plazo de una empresa competitiva en el mercado del producto. Hallar la función de oferta de la empresa a corto plazo comprobando gráficamente que, para cada precio, dicha función indica la cantidad de producto que maximiza el beneficio.

8.7. Considerar la función de producción $f(L) = L^\alpha$, donde $\alpha > 0$.

1. Determinar la relación entre los valores de α y la homogeneidad de la función.

2. Determinar la función de coste total de la empresa.

3. Determinar y dibujar la función de coste marginal.

4. ¿Es cierto que $CMg\,(Y) = CMe\,(Y)$ si $\alpha = 1$?

8.8. Considerar una empresa con una tecnología representada por la función de producción

$$f\,(L, K) = 27L^2K$$

y suponer que los precios de los factores son $w = 2$ y $r = 1$.

1. Hallar la función de costes totales a largo plazo y representarla gráficamente.

2. Hallar las funciones de costes medios y marginales a largo plazo y representarlas gráficamente. Explicar la relación entre ambas.

3. Hallar la función de costes totales a corto plazo, cuando $\overline{K} = 1$, y representarla gráficamente.

4. Hallar las funciones de costes medios y marginales a corto plazo, cuando $\overline{K} = 1$, y representarlas gráficamente. Explicar la relación entre ambas.