

Considera un individu que té unes preferències sobre el consum de dos béns, 1 i 2, representades per la funció d'utilitat $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ on $0 < a < 1$. Suposa que té una renda igual a r i que s'enfronta a uns preus dels béns 1 i 2 iguals a p_1 i p_2 respectivament.

1) Troba la funció de demanda del bé 1 i representa-la gràficament. Quina pendent té?

$$x_1(p_1) = \frac{ar}{p_1}; \frac{\partial x_1(p_1)}{\partial p_1} = -\frac{ar}{(p_1)^2} < 0$$

2) Troba la funció de demanda del bé 2 i representa-la gràficament. Quina pendent té?

$$x_2(p_2) = \frac{(1-a)r}{p_2}; \frac{\partial x_2(p_2)}{\partial p_2} = -\frac{(1-a)r}{(p_2)^2} < 0$$

3) Troba la corba d'Engel del bé 1 i representa-la gràficament. Quina pendent té?

$$x_1(r) = \frac{ar}{p_1}; \frac{\partial x_1(r)}{\partial r} = \frac{a}{p_1} > 0$$

4) Troba la corba d'Engel del bé 2 i representa-la gràficament. Quina pendent té?

$$x_2(r) = \frac{(1-a)r}{p_2}; \frac{\partial x_2(r)}{\partial r} = \frac{(1-a)}{p_2} > 0$$

5) Calcula la combinació de consum òptima quan els preus són p_1 i p_2 i la renda es r

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{ar}{p_1}, \frac{(1-a)r}{p_2} \right)$$

Considera un augment del preu del bé 1 de p_1 a $p_1 + 1$

6) Calcula la combinació de consum òptima quan els preus són $p_1 + 1$ i p_2 i la renda es r

$$(x_1', x_2') = \left(\frac{ar}{p_1+1}, \frac{(1-a)r}{p_2} \right)$$

7) Calcula l'efecte total degut a l'augment del preu del bé 1 de p_1 a $p_1 + 1$. Quin signe té?

$$ET = x_1' - x_1^* = \frac{ar}{p_1+1} - \frac{ar}{p_1} = -\frac{ar}{(p_1)(p_1+1)} < 0$$

8) Calcula el nivell de renda que hem de fer servir per a calcular l'efecte substitució d'Stutsky (\tilde{r})

$$\tilde{r} = (p_1 + 1)x_1^* + p_2x_2^* = (p_1 + 1)\frac{ar}{p_1} + p_2\frac{(1-a)r}{p_2} = \frac{ar}{p_1} + r$$

9) Calcula la combinació de consum òptima quan els preus són $p_1 + 1$ i p_2 i la renda es \tilde{r}

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \left(\frac{a\tilde{r}}{p_1+1}, \frac{(1-a)\tilde{r}}{p_2} \right) = \left(\frac{a\left(\frac{ar}{p_1} + r\right)}{p_1+1}, \frac{(1-a)\left(\frac{ar}{p_1} + r\right)}{p_2} \right)$$

$$= \left(ar \frac{a+p_1}{(p_1+1)p_1}, (1-a)r \frac{a+p_1}{p_1 p_2} \right)$$

10) Calcula l'efecte substitució d'Slutsky. Quin signe té?

$$ES = \tilde{x}_1 - x_1^* = ar \frac{a+p_1}{(p_1+1)p_1} - \frac{ar}{p_1} = -\frac{a(1-a)r}{p_1(p_1+1)} < 0$$

11) Calcula l'efecte renda d'Slutsky. Quin signe té?

$$ER = x_1' - \tilde{x}_1 = \frac{ar}{p_1+1} - ar \frac{a+p_1}{(p_1+1)p_1} = -\frac{a^2 r}{p_1(p_1+1)} < 0$$

12) Calcula el nivell d'utilitat que hem de fer servir per a calcular l'efecte substitució de Hicks (\tilde{u})

$$u(x_1^*, x_2^*) = u\left(\frac{ar}{p_1}, \frac{(1-a)r}{p_2}\right) = \left[\frac{ar}{p_1}\right]^a \left[\frac{(1-a)r}{p_2}\right]^{1-a}$$

13) Calcula el consum del bé 1 que fa servir la mínima renda quan els preus són $p_1 + 1$ i p_2 i la utilitat es \tilde{u}

$$x_1^a x_2^{1-a} = \left[\frac{ar}{p_1}\right]^a \left[\frac{(1-a)r}{p_2}\right]^{1-a} \text{ i } x_2 = \frac{1-a}{a} \frac{p_1+1}{p_2} x_1$$

$$\text{impliquen } \tilde{x}_1 = \frac{ar}{(p_1)^a (p_1+1)^{1-a}}$$

14) Calcula l'efecte substitució de Hicks. Quin signe té?

$$ES = \tilde{\tilde{x}}_1 - x_1^* = \frac{ar}{(p_1)^a (p_1+1)^{1-a}} - \frac{ar}{p_1} = \frac{ar}{p_1} \left(\left(\frac{p_1}{p_1+1}\right)^{1-a} - 1 \right) < 0$$

15) Calcula l'efecte renda de Hicks. Quin signe té?

$$ER = x_1' - \tilde{\tilde{x}}_1 = \frac{ar}{p_1+1} - \frac{ar}{(p_1)^a (p_1+1)^{1-a}} = \frac{ar}{p_1+1} \left(1 - \left(\frac{p_1+1}{p_1}\right)^a \right) < 0$$